1. Montrer que si une fonction f vérifie l'équation (E), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que toute solution de (E) est solution de l'équation différentielle $(E'): y' = y+1$.

Réciproquement ,quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être une solution de (E) ?

3. Résoudre (E).

23 **(La piqûre intraveineuse)**

A l'instant $t=0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination se modélise par l'équation différentielle $Q'(t) = -\alpha Q(t)$ où α est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $Q(t) = 1.8e^{-\alpha t}$.

Sachant qu'au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %, en déduire une équation vérifiée par α.

En utilisant la fonction $x \mapsto e^{-x}$, montrer qu'il existe un réel α unique tel que $e^{-\alpha} = 0.7$

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-4} près.

2. Etudier le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$ et tracer la courbe représentative C de Q.

3. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t=1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t=2$, $t=3$, etc.

On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$, dès que la nouvelle injection est faite.

a. Montrer que $R_1 = 1.8 + 0.7 \times 1.8$.

b. Montrer que $R_2 = 1.8 + 0.7 \times R_1$ et calculer R_2.

c. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

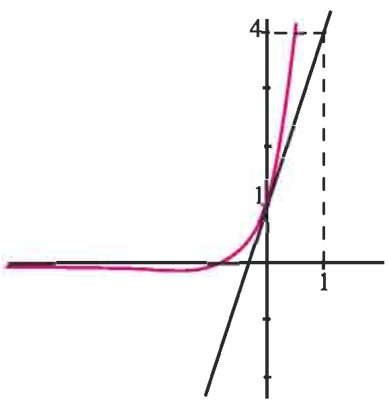
d. Montrer que pour tout entier naturel n,
$R_n = 6\left(1-(0.7)^{n+1}\right)$.

e. Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

24 On considère les deux équations différentielles $(I): y' = 2y$ et $(II): y' = y$.

1. Résoudre chacune de ces équations différentielles.

2. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe C d'une fonction f et d'une de ses tangentes T, dans un repère orthonormé.
Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où f_1 est une solution de l'équation (I) et f_2 une solution de l'équation (II).



2.a. A partir des données lues sur le graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Déterminer les fonctions f_1 et f_2.

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.

c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

3. Soit un réel $t < -\ln 2$.

a. Exprimer à l'aide de t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = -\ln 2$.

b. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\ln 2}^{0} f(t)dt$.

Interpréter graphiquement.

25 1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 4y' + 3y = 0$.

b. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0,4]$ par $g(x) = 8e^{-0.75x}$.